Date : Novembre2020 — **Devoir de synthèse N°1** — **Niveau : 3ème maths**

Nombre de pages : **2+annexe** — Durée : **2h**

MATHEMATIQUES

Le sujet comporte 3 pages numérotés 1,2 et 3. La page 3 est une annexe à remplir et rendre avec la copie

EXERCICE N° 1 (3 pts)

1) Soient a et b deux réels tel que $a \prec b$ et f une fonction définie et continue sur [a;b] tel que $f([a;b]) \subset]a;b[$.

a) Déterminer le signe de f(a)–a et celui de f(b)-b .

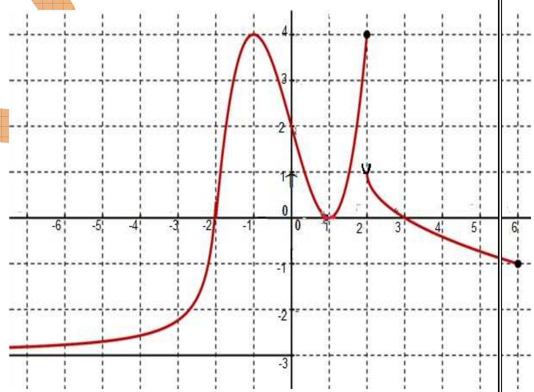
b) En déduire qu'il existe au moins un réel α dans]a ;b[tel que $f(\alpha)=\alpha$.

2) Le plan est orienté dans le sens direct. Soient A,B,C,D et E des points tel que : $(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$,

$(\widehat{\vec{AD},\vec{AC}}) \equiv \frac{-\pi}{3}\,[2\pi]$ et $(\widehat{-3\vec{AE},2\vec{AD}}) \equiv \frac{5\pi}{6}\,[2\pi]$. Montrer que $A \in [BE]$.

EXERCICE N° 2 (3 pts)

On considère dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, ci-dessous, la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-\infty; 6]$.



1) Déterminer les intervalles sur lesquels f est continue .

2) Déterminer $f(]-\infty; 2])$.

3)Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction g.

b) Montrer que pour tout $x \in]2;3[$, on a : $\frac{g(x)-1}{f(x)-1} = \frac{-g(x)}{\sqrt{f(x)}+1}$.

c) En déduire $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{g(x)-1}{f(x)-1}$.

EXERCICE N° 3(5 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x-1} & \text{si } x \prec 1 \\ \frac{4}{x} - \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 1. En déduire que f est continue sur IR.

2) Montrer que f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

3) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle]2 ; 3[.

b) Montrer que α est solution de l'équation : $x^3 - x^2 - 16 = 0$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{x^3-x^2-16}{x-\alpha} = 3\alpha^2 - 2\alpha$.(Remarquer que $x^3 - x^2 - 16 = (x^3 - x^2 - 16) - (\alpha^3 - \alpha^2 - 16)$)

4)On donne dans la feuille annexe (figure 1) les courbes C_g et C_h des deux fonctions définies sur $[1;+\infty[$ par

$g(x) = \frac{4}{x}$ et $h(x) = \sqrt{x-1}$ dans un repère$(O;\vec{i};\vec{j})$,. On note M le point d'intersection de C_g et C_h .

a) Déterminer les coordonnées de M en fonction de α .

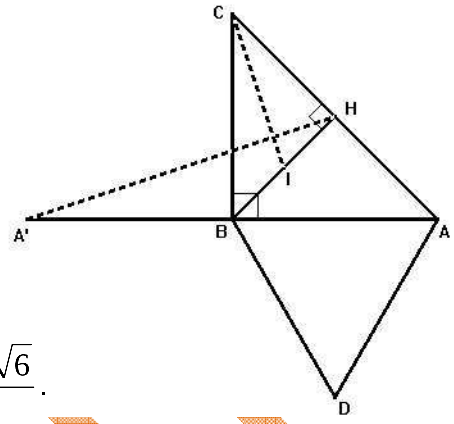
b) Sur la feuille annexe, Construire sur l'axe des abscisses le point N d'abscisse α .

c) Montrer que l'aire du triangle 0MN est $\mathcal{A} = 2$.

EXERCICE N° 4 (4 pts)

Dans la figure ci-contre, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en B tel que AB = 2.

Le triangle ABD est équilatéral. A' est le symétrique de A par rapport à B ;H est le projeté orthogonal de B sur (AC) . I est le milieu de [BH].



1) Calculer AC.

2) Montrer que $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = -2\sqrt{3}$. (On donne : $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$)

3) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = -2$.

b) Développer $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})$. En déduire que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 2(1-\sqrt{3})$.

c) Vérifier que $\widehat{DAC} = \frac{7\pi}{12}$, puis en déduire que : $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

4) On munit le plan du repère orthonormé $(B, \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}, \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$.

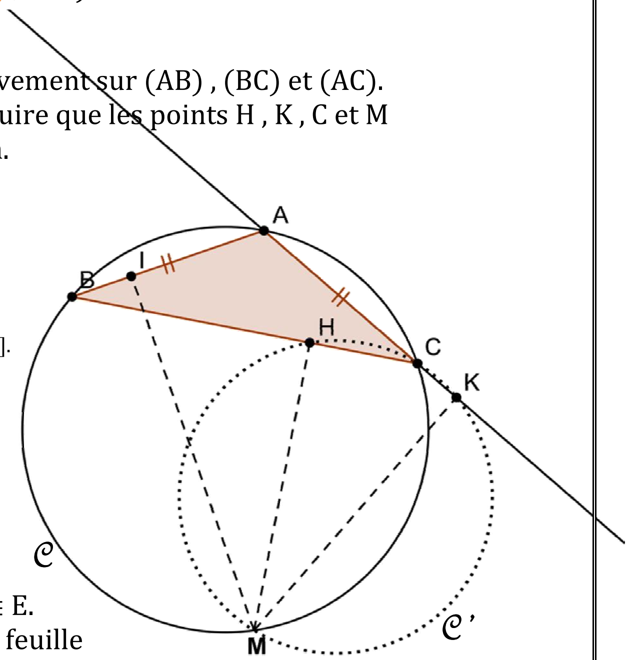
a) Déterminer les coordonnées des points A, C, H, I et A' (Sans justification).
b) Montrer que les droites (A'H) et (IC) sont perpendiculaires.

EXERCICE N° 5 (5 pts)

Le plan est orienté dans le sens direct .Dans la figure ci-dessous ABC est un triangle isocèle de sommet principal A inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

1) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2) Soit M un point de l'arc orienté $\overset{\frown}{BC}$, distinct de B et C.
Soient I , H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) , (BC) et (AC).



a) Quel est la nature des triangles MHC et MKC ? En déduire que les points H , K , C et M appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}'$ que l'on précisera.

b) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{KH}, \overrightarrow{KM}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}}) [2\pi]$.

c) En remarquant que les points M, K, A et I sont cocycliques, montrer que $(\widehat{\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KI}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}}) [2\pi]$.

d) En déduire que les points I , H et K sont alignés.

3) Soit E l'ensemble des points N du plan tel que $(\widehat{\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NC}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

a) Soit D le symétrique de C par rapport à A.
Montrer que ABD est équilatéral. En déduire que $D \in E$.

b) Déterminer alors l'ensemble E et le construire sur la feuille annexe (figure 2).

c) Montrer que le point M′ symétrique de M par rapport à (BC) appartient à l'ensemble E (Autrement dit vérifier que $(\widehat{\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'C}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$).

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

Nom : ....

Prénom : ....

Figure 1 : **(EXERCICE 3)**

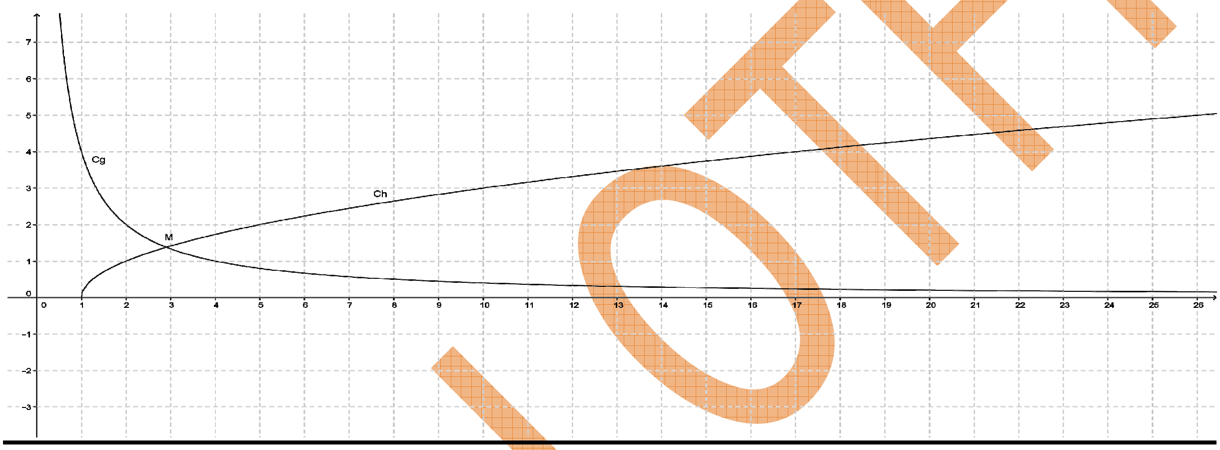


Figure 2: **(EXERCICE 5)**